Сравнение равновесий Нэша и Штакельберга в модели коллективных действий

Цуриков Владимир Иванович

доктор экономических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», г. Кострома, Российская Федерация.
E-mail: tsurikov@inbox.ru

Скаржинская Елена Матвеевна

доктор экономических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Российская Федерация.
E-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

Аннотация. С помощью математического моделирования проводится сравнение результатов коллективных действий, достигаемых в условиях их различной координации. Предполагается, что члены коллектива получают совокупный доход, величина которого возрастает с ростом прилагаемых ими усилий и подчиняется закону убывающей отдачи. Влияние координации на эффективность их действий обусловлено комплементарностью усилий, которая выражается в том, что рост объема усилий, прилагаемых каждым из агентов, приводит к росту предельного дохода по усилиям любого другого агента. Образование коалиции (малой группы), члены которой стремятся к максимуму коалиционного выигрыша, позволяет коллективу избежать ловушки «плохого равновесия» Нэша, в которую он попадает при автономном выборе каждым участником размера своих усилий. Анализируются и сравниваются результаты двух игр с участием коалиции: одновременной, в которой достигается равновесие по Нэшу, и последовательной с достижением равновесия по Штакельбергу. В последовательной игре члены коалиции играют роль лидера и поэтому первыми осуществляют свои усилия. Все некооперированные агенты играют роль последователей и определяют объемы прилагаемых ими усилий с учетом размеров усилий, уже осуществленных членами коалиции. Соответственно, члены коалиции, учитывая стремление каждого некооперированного агента к максимуму своего индивидуального выигрыша в условиях его информированности относительности размеров коалиционных усилий определяют методом обратной индукции оптимальный объем своих усилий. В результате применения коалицией стратегии Штакельберга величина совокупного дохода и выигрыш каждого члена коллектива в последовательной игре оказываются выше, чем в одновременной коалиционной игре.

Ключевые слова: коллективные действия, коалиция, равновесие Нэша, стратегия Штакельберга, эффективность по Парето

JEL codes: C31; D23; D61; D62

Для цитирования: Цуриков, В.И. Сравнение равновесий Нэша и Штакельберга в модели коллективных действий / В.И. Цуриков, В.И. Цуриков. - Текст : электронный // Теоретическая экономика. - 2024 - №1. - С75-86. - URL: http://www.theoreticaleconomy.ru (Дата публикации: 30.01.2024)

Введение

Работа посвящена теоретическому исследованию возможностей для повышения эффективности коллективных действий, направленных на получение совокупного дохода. Предполагается, что величина дохода возрастает с ростом объема индивидуальных усилий, прилагаемых каждым членом коллектива. По завершении усилий доход распределяется в заранее оговоренных относительных долях между всеми участниками. Чистый доход (выигрыш) каждого агента равен разности между получаемой им частью совокупного дохода и объемом приложенных им усилий в его денежном эквиваленте. Каждый участник коллектива стремится к максимуму своего индивидуального выигрыша.

Всем агентам выгодно участвовать в коллективных действиях в силу синергетического эффекта, который обусловлен комплементарностью усилий, т.е. положительным влиянием, оказываемым усилиями одного (любого) члена коллектива на усилия другого. В нашем случае связь между усилиями агентов такова, что рост усилий со стороны одного агента приводит к увеличению предельного дохода по усилиям другого агента. Математически она выражается в том, что производная второго порядка от совокупного дохода по усилиям двух разных агентов строго больше нуля.

В работе [1] мы показали, что если каждый член коллектива в стремлении к максимуму своего индивидуального выигрыша выбирает объем своих усилий автономно (независимо от других агентов), то коллектив попадает в ловушку «плохого», по выражению Р. Капелюшникова [2. с. 9-10], равновесия Нэша (обозначаемое ниже как N). Существует бесчисленное множество Парето-предпочтительных исходов, причем таких, в каждом из которых выигрыши всех агентов выше, чем в плохом равновесии.

Достижение любого предпочтительного по Парето исхода требует приложения усилий в большем объеме. Но, что очень важно, каждому агенту выгодно прилагать дополнительные усилия только в том случае, когда он твердо уверен, что так же поступают и его партнеры. Как видим, проблема недоинвестирования тесно связана с проблемой координации действий, которая порождается проблемой заслуживающих доверие обязательств, характерной для гибридных организационных форм [3, гл. 7-8]. Отметим, что аналогичные условия наряду с эгоистическими устремлениями участников являются причиной недоинвестирования со стороны контрагентов в моделях неполного контракта [4-8; 9, с. 50-54; 10, с. 293-301] Они же порождают проблему морального риска в модели Бенгта Хольмстрёма [11].

В работе [1] нами рассмотрена возможность повышения эффективности коллективных действий путем образования в коллективе коалиции и реализации ею коалиционной стратегии. Под коалицией мы понимаем сложившуюся из членов коллектива небольшую группу агентов, полностью доверяющих друг другу и способных осуществить свои усилия в тех объемах, которые необходимы для максимизации коалиционного выигрыша. В [1] показано, что коалиционная стратегии приводит коллектив к равновесию Нэша (дальше для него используется обозначение:) в коалиционной игре, в которой коалиция выступает как единый игрок, максимизирующий коалиционный выигрыш, а каждый некооперированный член коллектива по-прежнему максимизирует свой индивидуальный выигрыш. Это равновесие оказывается доминирующим плохое равновесие Нэша N.

Коалиционная стратегия, приводящая коллектив к равновесному по Нэшу исходу, оказывается не единственным способом координации усилий членов коллектива, позволяющим им избежать плохого равновесия. Предпочтительный по Парето исход коллектив может достичь в результате появления в коллективе лидера по Штакельбергу.

Напомним, что первоначально модели Курно [12] и Штакельберга [13] были разработаны для дуополии. Позднее они были обобщены на произвольное количество компаний [14-17] и на многопродуктовые рынки [18]. Если в модели Курно обе фирмы равноправны, то модель Штакельберга предполагает отказ от симметрии, в результате чего одна из сторон является лидером, делающим первый шаг, а вторая – последователем. Последователь выбирает свою стратегию с учетом уже известной ему стратегии лидера. Лидер, зная будущую реакцию последователя на свои действия, вводит эту зависимость в свою функцию полезности и тем самым получает зависимость свой полезности только от собственной стратегии. Дальше ему остается только выбрать ту стратегию, которая максимизирует его выигрыш.

Концепция Штакельберга оказалась очень привлекательной для теоретической экономики, сохранив свою актуальность и в наше время. В частности, в последние годы появился ряд работ, посвященных ее дальнейшему развитию. Например, в работах [19-20] изучаются возможности достижения олигополией равновесия по Штакельбергу в условиях отсутствия у агентов достоверной информации относительно издержек и выбора конкурентов. В модели олигополии [21] анализируется зависимость выигрышей в равновесии Штакельберга от вида функций издержек.

Наряду с работами, посвященными равновесию Штакельберга на олигополистическом рынке, появляются работы, распространяющие идею Штакельберга о зависимости стратегий лидера и последователя, на коллективные действия. Одним из первых среди экономистов к этой теме обратился Бенджамин Гермалин (B. Hermalin). Согласно предложенной им в 1998 году концепции лидер, в отличие от остальных членов коллектива, располагает информацией о влиянии их усилий на величину дохода [22]. Это информационное преимущество он может использовать двумя способами.

Первый способ состоит в том, что лидер, убедив членов коллектива в достоверности этой информации, способен с помощью побочных платежей влиять на стимулы агентов к осуществлению усилий. Второй способ состоит в убеждении и увлечении своих последователей собственным примером. Асимметричное распределение информации, как показано в [23], способно приводить коллектив к предпочтительному по Парето исходу относительно того исхода, который достигается в случае симметричной информации. В [24] это утверждение было подвергнуто экспериментальной проверке и получило подтверждение. Последовавшие за работой Гермалина полевые и лабораторные исследования свидетельствуют как о существовании зависимости поведения от убеждений, так и о сильном влиянии, которое оказывают на убеждения своим поведениям лидеры в роли образцов для подражания [25].

Стремление следовать за лидером можно учитывать по-разному. Например, в математической модели, построенной в [26], функцией полезности последователя просто предусмотрен рост полезности по мере снижения разности между усилиями лидера и последователя. В работах [27-28] последователи следуют за лидером, как и в нашей модели, вследствие комплементарности усилий. Однако в работе Жерве-Гольдштейна [27] стратегия Штакельберга не осуществляется, так как предпочтительный по Парето эффект образуется благодаря тому, что последователь неадекватно оценивает собственные усилия, т.е. фактически вследствие нерационального поведения. Равновесие Штакельберга достигается в модели коллективных действий Дж. Кима [28]. В отличие от нашей модели в модель Кима введен принципал, наделенный способностью компенсировать лидеру его издержки.

Нужно отметить, что стратегия Штакельберга анализируется в работах, посвященных теории управления [29-32]. Как правило, соответствующие математические модели строятся для иерархической системы, состоящей из двух игроков: Центра и агента. Центр ограничивает своим первым ходом множество действий игрока, и в общем решении максимизации выигрыша равновесие Штакельберга выступает в виде одного из возможный вариантов.

В качестве наиболее заметных отличий нашей модели от моделей типа Центр-агент и других, предложенных в литературе, можно отметить следующие: мы рассматриваем деятельность коллектива произвольной численности; коллектив предполагается независимым от внешних агентов, способным к самоуправлению и самоорганизации; выигрыш каждого участника зависит и от его собственного выбора и от действий его любого партнера; поведение агентов рационально.

Цель статьи состоит в том, чтобы с помощью математического моделирования с использованием методов теории игр сравнить эффективность трех различных стратегий коллективных действий. Две из рассматриваемых стратегий приводят коллектив к равновесным по Нэшу исходам, а третья – к равновесию Штакельберга с коалицией в роли лидера. Исчерпывающее сравнение стратегий предполагает отыскание в каждом из исходов и соответствующее сравнение величин совокупного дохода, размеров индивидуальных выигрышей и осуществленных агентами усилий.

Базовая модель. Плохое равновесие

Для наиболее наглядной демонстрации получаемых результатов используется конкретная математическая зависимость величины совокупного дохода D от приложенных агентами усилий:

$$D = \lambda \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^{a} \tag{1}$$

где σ_i – денежный эквивалент усилий агента i, n – количество участников, λ, α – постоянные, причем λ>0, 0<α<1. Эти условия достаточны для того, чтобы функция (1) удовлетворяла всем стандартным требованиям, обычно предъявляемым неоклассической экономической теорией к функциям дохода.

К особенности функции (1) можно отнести свойство постоянной эластичности дохода по усилиям любого члена коллектива:

$$\frac{\sigma_i}{D}\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = a\,,\; i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Из неравенств

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} = \frac{a^2 D}{\sigma_k \sigma_1} > 0 \text{ при } i \neq k \tag{3}$$

следует условие комплементарности усилий всех агентов: рост усилий одного агента увеличивает отдачу от усилий другого.

Для большей наглядности получаемых результатов будем считать, что все агенты имеет равные доли в совокупном доходе, т.е. доля каждого равна 1/n. В основу модели положим следующие предположения.

1. Функция дохода и стремление каждого участника к максимальному значению своего индивидуального выигрыша являются общим знанием.

2. Каждый участник сам выбирает размер прилагаемых им усилий.

3. Усилия агентов неверифицируемы, но наблюдаемы после их завершения для всех членов коллектива. Из этого условия следует, что члены коллектива получают информацию относительно объема усилий, уже осуществленных любым участником, но они не могут ее использовать для разрешения споров и конфликтов, прибегая к помощи третьей стороны (внешнего агента).

4. Поведение каждого участника коллективных действий направлено на «простое следование личным интересам» и соответствует, согласно классификации О. Уильямсона [3, с. 97-107], полусильной форме эгоизма. Это означает, что каждый член коллектива, преследуя личные экономические интересы, не прибегает к крайним формам оппортунизма в виде вероломства, шантажа, насильственного захвата заложников и т.п.

Рассмотрим случай, в котором все агенты осуществляют выбор объема своих усилий независимо друг от друга. Цель каждого – максимизировать свой индивидуальный выигрыш U_i:

$$U_i = \frac{1}{n}D - \sigma_i \to \max_{\sigma_i > 0},\; i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Так как функция (4) строго выпукла вверх, то она имеет единственный максимум, находящийся в стационарной точке. Поэтому размеры усилий, прилагаемых агентами, можно найти из условий максимума первого порядка:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1,\; i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Используя свойство (2) перепишем уравнения (5) в виде

$$\sigma_i = \frac{aD}{n},\; i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Подставив выражение для усилий из (6) в (1), получим уравнение относительно совокупного дохода D, из которого найдем его значение в плохом равновесии N:

$$D^N = \left(\lambda (a/n)^{an}\right)^{\frac{1}{1-an}} \tag{7}$$

Используя (7) получим из (6) и (4) выражения для усилий и выигрышей:

$$\sigma_i^N = (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-an}},\ U_i^N = \frac{1}{n} D^N (1-a),\ i = 1, \dots, n \tag{8}$$

Из (8) видно, что все члены коллектива в плохом равновесии N затрачивают одинаковые усилия и получают равные выигрыши.

Равновесие Нэша в одновременной коалиционной игре

В работе «Логика коллективных действий» Мансур Олсон, сравнивая большие и малые группы индивидов по эффективности совместных действий, сформулировал вывод о том, что малым группам легче добиться достижения своих целей [33]. В дальнейшем концепция Олсона относительно связи размера группы с эффективностью коллективных действий подверглась уточнению и развитию в целом ряде работ, см. в частности, [34-36]. Вопросы о роли состава группы и общности норм поведения ее членов изучала в ходе своих лабораторных и полевых исследований Элинор Остром [37].

Результаты этих работ позволяют нам допустить, что в любом достаточно многочисленном коллективе вполне может сложиться небольшая группа агентов (коалиция), в которой окажется успешно разрешенной не только проблема морального риска, но и проблема оппортунистического поведения в целом. Отметим, что анализу вопросам сдерживания оппортунистического поведения в коллективных действиях посвящено множество работ, в частности [38-41]. Для нашей модели достаточно, чтобы члены коалиции были способны без заметных трансакционных издержек осуществить свои усилия в объемах, достаточных для достижения максимума коалиционного выигрыша.

Предположим, что среди членов коллектива сложилась такая состоящая из m индивидов коалиция. Используем в дальнейшем следующие обозначения: I – множество членов коллектива; C – множество членов коалиции, NC=I \ C – множество некооперированных агентов. Если коалиция максимизирует коалиционный выигрыш, а некооперированные агенты – свои индивидуальные выигрыши, причем для всех игроков эта информация является общим знанием, то коллектив достигает равновесный по Нэшу исход в коалиционной игре, в которой коалиция рассматривается как единый игрок.

Результаты этой игры для функции (1) получены в нашей работт [42]. Для их использования необходимо только учесть, что в рассматриваемой здесь задаче относительные доли всех членов коллектива в совокупном доходе одинаковые. Преобразовав результаты [42] для случая, в котором доля некооперированного агента равна 1/n, а доля коалиции – m/n , получим следующие выражения для совокупного выигрыша, размеров усилий и индивидуальных выигрышей и :

$$D^{N_C} = \left(\lambda (a/n)^{an} m^{am}\right)^{\frac{1}{1-an}} \tag{9}$$

$$\sigma_i^{N_C} = \frac{amD^{N_C}}{n};\ \sigma_j^{N_C} = \frac{aD^{N_C}}{n};\ i \in C,\ j \in NC \tag{10}$$

$$U_i^{N_C} = D^{N_C}(1-am)/n\,;\ U_j^{N_C} = D^{N_C}(1-a)/n \tag{11}$$

Теперь сравним результаты двух рассмотренных стратегий, приводящих коллектив к равновесным по Нэшу исходам. Для этого построим отношения значений параметров, достигаемых в равновесиях N_c и N. Используя выражения для доходов (9) и (7), а также для усилий (6) и (10), получим:

$$\frac{D^{N_C}}{D^N} = \frac{\sigma_j^{N_C}}{\sigma^N} = m^{\frac{am}{1-an}},\ \frac{\sigma_i^{N_C}}{\sigma^N} = m^{\frac{am}{1-an}+1},\ i \in C,\ \ j \in NC \tag{12}$$

Для получения более наглядного представления обратимся к конкретному случаю. Пусть n=20, m=4, α=0,04. Тогда, согласно (12),

$$\frac{D^{N_C}}{D^N} = \frac{\sigma_j^{N_C}}{\sigma^N} = 4^{0,8} \approx 3{,}03;\ \frac{\sigma_i^{N_C}}{\sigma^N} \approx 12{,}1 \tag{13}$$

Используя выражения для индивидуальных выигрышей (8) и (11) найдем соответствующие отношения:

$$\frac{U_i^{N_C}}{U_i^N} = \frac{D^{N_C}(1-am)}{D^N(1-a)} \approx \frac{3{,}03 \times 0{,}84}{0{,}96} \approx 2{,}7\,;\ \frac{U_j^{N_C}}{U_j^N} = \frac{D^{N_C}}{D^N} \approx 3 \tag{14}$$

Таким образом, в результате перехода от плохого равновесия N к равновесию N_c совокупный доход и выигрыш каждого некооперированного члена коллектива возрастают более чем в 3 раза, а выигрыш каждого члена коалиции – в 2,7 раза. При этом объем усилий члена коалиции увеличивается в 12 раз, а некооперированного агента – в 3 раза.

Равновесие Штакельберга в последовательной игре

Прежде всего, отметим, что модель Штакельберга, первоначально разработанная для дуополии, не может быть автоматически перенесена на коллективные действия. В дуополии обе фирмы являются конкурентами, и поэтому любая активность конкурента для каждого участника не желательна. В коллективных же действиях, наоборот, активность партнера выгодна каждому участнику. Однако в случае существования зависимости между стратегиями игроков главная идея, положенная Штакельбергом в основу модели, – наличие лидера и последователя, когда лидер, действующий первым, выбирает свою стратегию методом обратной индукции, сохраняет свою актуальность.

В рассматриваемой модели уже имеется предпосылка для успешного использования коалицией (или любым членом коллектива) стратегии по Штакельбергу. Она состоит в условии (3), согласно которому повышение уровня усилий со стороны любого члена коллектива ведет к возрастанию предельного дохода по усилиям каждого его партнера. Поэтому если кто-либо из участников приложит дополнительные усилия сверх их равновесного значения (8) или (10), принимаемого в соответствующей игре, то величина индивидуального предельного дохода по усилиям любого другого агента превысит величину его предельных издержек (в нашей модели, единицу).

Соответственно, каждому из этих агентов в данном случае выгодно увеличить размеры прилагаемых им усилий до уровня, отвечающего максимуму его соответствующего выигрыша – индивидуального (если агент не является членом коалиции) или коалиционного (для члена коалиции). Чтобы пойти на такой шаг агент (последователь) должен быть абсолютно уверен в том, что тот или иной его партнер (лидер) действительно уже осуществил или непременно осуществит свои усилия сверх их значения, отвечающего равновесию Нэша. Такую уверенность агенту-последователю может дать или полное доверие с его стороны обещаниям лидера, либо внесение будущим лидером залога, либо непосредственное наблюдение осуществленных лидером усилий.

Для успешной реализации стратегии Штакельберга достаточно выполнения любого из этих условий. Мы остановимся на том варианте, в котором технология, используемая в коллективных действиях, позволяет членам коалиции и некооперированным агентам осуществить свои усилия в двух различных следующих друг за другом временных интервалах. Отметим, что подобная возможность была предусмотрена механизмом timing decisions, предложенным в работе [43] для применения стратегии Штакельберга в условиях дуополии.

Предположим, что члены коалиции осуществляют свои усилия в первом временном интервале. Тогда все некооперированные агенты имеют возможность выбрать уровень своих усилий, осуществляемых ими во втором временном интервале, с учетом объема усилий, уже осуществленных членами коалиции. В этом случае коалиция играет роль лидера по Штакельбергу, а все некооперированные агенты являются ее последователями.

Перепишем функцию совокупного дохода (1) в виде:

$$D = \lambda \prod_{i \in C} \sigma_i^a \prod_{j \in NC} \sigma_j^a \tag{15}$$

Каждый некооперированный агент выбирает уровень своих усилий из условия максимума первого порядка собственного выигрыша при заданных размерах усилий членов коалиции σ_i:

$$\frac{1}{n}\frac{\partial D}{\partial \sigma_j} = 1, \ j \in NC \tag{16}$$

При любых положительных σ_i система (16) имеет единственное решение, представляющее собой оптимальные значения усилий некооперированных агентов. Так как эти усилия зависят от усилий членов коалиции, то их можно трактовать как функции реагирования некооперированных агентов. Используем для решения системы (16) следующие обозначения:

$$\sigma_j = R_j(\sigma_i), \ j \in NC, \ i \in C \tag{17}$$

Для функции (15) уравнения (16) можно представить в виде:

$$aD = n\sigma_j \tag{18}$$

из которого следует, что все некооперированные агенты осуществляют равные усилия. Подставив выражение для D из (15) в (18) получим уравнение

$$\lambda a \sigma_j^{a(n-m)} \prod_{i \in C} \sigma_i^a = n\sigma_j \tag{19}$$

из которого выразим σ_j, т.е. найдем функцию реагирования:

$$\sigma_j = R_j(\sigma_i) = \left(\frac{\lambda a}{n} \prod_{i \in C} \sigma_i^a \right)^{\frac{1}{1-a(n-m)}}. \tag{20}$$

Члены коалиции, взявшей на себя роль лидера по Штакельбергу, вычисляют размеры своих усилий с учетом функций реагирования (20) некооперированных агентов на свои будущие усилия. Подставив выражение для усилий некооперированных агентов из (20) в функцию совокупного дохода (15) найдем зависимость его величины от усилий членов коалиции:

$$D = \left(\lambda \left(\frac{a}{n} \right)^{a(n-m)} \prod_{i \in C} \sigma_i^a \right)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \tag{21}$$

Условия максимума коалиционного выигрыша первого порядка для функции дохода (20) принимают вид:

$$\frac{m}{n}\frac{\partial D}{\partial \sigma_k} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{m}{n} \times \frac{a}{1-a(n-m)} \times \frac{D}{\sigma_k} = 1, \ k \in C \tag{22}$$

Из (22) находим объем усилий, прилагаемый каждым членом коалиции, благодаря чему коллектив и достигает равновесный по Штакельбергу исход:

$$\sigma_k = \frac{maD}{n - an(n-m)}, \ k \in C \tag{23}$$

Подставив выражение для усилий членов коалиции из (23) в (20), получим уравнение для величины совокупного дохода, из которого найдем его значение в равновесии Штакельберга:

$$D = D^S = \left(\lambda \left(\frac{a}{n} \right)^{an} \left(\frac{m}{1-a(n-m)} \right)^{am} \right)^{\frac{1}{1-an}} \tag{24}$$

С учетом (24) значение объема усилий (23) членов коалиции принимает вид:

$$\sigma_i^S = \frac{maD^S}{n - an(n-m)},\ i \in C \tag{25}$$

Таким образом, члены коалиции, найдя оптимальный объем своих усилий (25), осуществляют их в первом временном интервале. Некооперированные агенты после завершения этого интервала определяют, учитывая объем усилий (24) уже осуществленных членами коалиции, уровень своих усилий либо из выражения (20) либо, что удобнее, из уравнения (18):

$$\sigma_j^S = \frac{aD^S}{n},\ j \in NC \tag{26}$$

Определив размер собственных усилий, некооперированные агенты осуществляют их во втором временном интервале. В результате коллектив достигает равновесие Штакельберга. Заметим, что ни коалиции, как единому агенту, и ни одному некооперированному агенту невыгодно осуществлять свои усилия в объемах, отличающихся от тех, которые определяются выражениями (25)-(26) и (24).

С учетом (25) и (26) получим выражения для индивидуальных выигрышей:

$$U_i^S = \frac{1}{n} D^S \frac{1-an}{1-a(n-m)};\ U_j^S = \frac{D^S}{n}(1-a);\ i \in C,\ j \in NC. \tag{27}$$

Перейдем к сравнению результатов двух стратегий, одна из которых приводит коллектив к равновесию Нэшу в коалиционной одновременной игре, а другая – к равновесию Штакельберга в последовательной игре с коалицией в роли лидера. Для n=20, m=4, α=0,04 из (9) и (24) получим:

$$\frac{D^S}{D^{N_C}} = \left(\frac{1}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{am}{1-an}} = \left(\frac{1}{0{,}36}\right)^{0{,}8} \approx 2{,}26 \tag{28}$$

Из (10) и (25) найдем:

$$\frac{\sigma_i^S}{\sigma_i^{N_C}} = \frac{D^S}{(1-a(n-m))D^{N_C}} \approx \frac{2{,}26}{0{,}36} \approx 6{,}3;\ i \in C \tag{29}$$

Из (26) и (10), а также (27) и (11) получим соответствующие отношения для усилий и выигрышей некооперированных агентов:

$$\frac{\sigma_j^S}{\sigma_j^{N_C}} = \frac{U_j^S}{U_j^{N_C}} = \frac{D^S}{D^{N_C}} \approx 2{,}26;\ j \in NC \tag{30}$$

Отношение выигрышей члена коалиции найдем из формул (27) и (11):

$$\frac{U_i^S}{U_i^{N_C}} = \frac{D^S}{D^{N_C}} \times \frac{1-an}{(1-am)(1-a(n-m))} \approx 1{,}5;\ i \in C \tag{31}$$

Как видим, в результате перехода коалиции от стратегии максимизации коалиционного выигрыша в одновременной игре, приводящей коллектив к равновесию Нэша, к стратегии Штакельберга с ролью лидера в последовательной игре совокупный доход и выигрыши некооперированных агентов возрастают почти в 2,3 раза, а выигрыши членов коалиции – в 1,5 раза. Таким образом, наиболее эффективной из трех рассмотренных стратегий оказывается стратегия Штакельберга.

Заключение

В предложенной в настоящей статье модели использована конкретная функция совокупного дохода. Поэтому может создаться впечатление, что при использовании функции другого вида и результат может оказаться другим. Поэтому хотелось бы подчеркнуть те причины, в силу которых равновесие по Штакельбергу оказалось доминирующим равновесие по Нэшу, достигаемое в одновременной игре. Представляется, что полученный результат порождается следующими тремя условиями: действием закона убывающей отдачи, стремлением каждого участника к повышению своего индивидуального выигрыша и комплементарностью усилий.

Первые два условия ограничивают объемы усилий, прилагаемых агентами. Если бы не выполнялось первое условие, то либо модель оказалась бы абсолютно нелепой, либо пришлось бы менять функцию издержек таким образом, чтобы функция выигрыша была строго выпуклой вверх. В последнем случае получаемый результат не претерпел бы качественных изменений. Второе условие вполне естественно и необходимо для использования понятия Парето-эффективности. Условие комплементарности усилий необходимо для синергетического эффекта, без которого для любого агента утрачивается выгода коллективных действий. Перечисленные свойства функций дохода и выигрыша являются стандартными в неоклассической экономической теории. Поэтому можно думать, что использование в модели любой другой функции дохода или выигрыша, удовлетворяющей перечисленным условиям, привело бы к аналогичным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цуриков В.И., Скаржинская Е.М. Проявление эффекта малой коалиции в действиях большого коллектива. Часть 1 // Теоретическая экономика. 2022. № 9 (93). С. 57-70.

2. Капелюшников Р.И. Множественность институциональных миров: Нобелевская премия по экономике-2009: Препринт WP3/2010/02 (Часть 1). – М.: ГУ-ВШЭ, 2010. – 52 с.

3. Уильямсон О.И. Экономические институты капитализма: Фирмы, рынки, «отношенческая» контрактация. СПб.: Лениздат, 1996. – 702 с.

4. Grossman S., Hart O. The Cost and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration // Journal of Political Economy. 1986. No 4. P. 691-719.

5. Hart O.D., Moore J. Incomplete Contracts and Renegotiation // Econometrics. 1988. No 4. P. 755-785.

6. Hart O.D., Moore J. Incomplete Contracts and Renegotiation // Econometrics. 1988. No 4. P. 755-785.

7. Шаститко А. Неполные контракты: проблемы определения и моделирования // Вопросы экономики. 2001. № 6. С. 80-99.

8. Скоробогатов А. Теория организации и модели неполных контрактов // Вопросы экономики. 2007. № 12. С. 71-95.

9. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. Т.1. Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – 376 с.

10. Фуруботн Э.Г., Рихтер Р. Институты и экономическая теория: Достижения новой институциональной экономической теории. Пер. с англ. – СПб.: Издательский Дом СПбГУ, 2005. – 702 с.

11. Holmstrom B. Moral Hazard in Teams // The Bell Journal of Economics. 1982. № 2. P. 324-340.

12. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. – London: Hafner, 1960. (Original 1838.) – 213 p.

13. Stackelberg H. Marktform und Gleichgewicht. – Wien; Berlin: J. Springer, 1934. – 138 p.

14. Anderson S., Engers M. Stacelberg versus Cournot oligopoly equilibrium // International Journal of Industrial Organization. 1992. No 1. P. 127-135.

15. Linster B. Stackelberg rent-seeking // Public Choice. 1993. No 2. P. 307-321.

16. Ino H., Matsumura T. How Many Firms Should be Leaders? Beneficial Concentrations Revisited // International Economic Review. 2012. No 4. P. 1323-1340.

17. Julien L. Stackelberg Games. In Handbook of Game Theory and Industial Organisation. 2018. V. 1. No 10. P. 261-311.

18. Nocke V, Shutz N. Multiproduct-Firm Oligopoly: An Aggregative Games Approach // Econometrica. 2018. V. 86. No 2. P. 523-557.

19. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // Автоматика и телемеханика. 2020. № 7. С. 113-128.

20. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // Автоматика и телемеханика. 2017. № 7. С. 91-105.

21. Гераськин М.И. Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // Автоматика и телемеханика. 2020. № 9. С. 120-143.

22. Hermalin B. Toward an Economic Theory of Leadership: Leading by Example // The American Economic Review. 1998. V. 88. P. 1188-1206.

24. Potters J., Sefton M., Vesterlund L. Leading-by-example and signaling in voluntary contribution games: an experimental study // Economic Theory. 2007. No 33. P. 169-182.

25. Gächter S, Renner E. Leaders as role models and ‘belief managers’ in social dilemmas // Journal of Economic Behavior & Organization. 2018. V. 154(C). P. 321-334.

26. Huck S., Rey-Biel P. Endogenous leadership in teams // Journal of Institutional and Theoretical Economics.2006. No 2.P. 253-261.

27. Gervais S., Goldstein I. The Positive Effects of Biased Self-Perceptions in Firms // Review of Finance.

2007. No 3. P. 453-496.

28. Kim J. Endogenous leadership in incentive contracts // Journal of Economic Behavior & Organization. 2012. No 1. P. 256-266.

29. Горелов М.А. Модель управления ограничениями деятельности // Проблемы управления. 2019. № 4. С. 43–49.

30. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2005. – 138 с.

31. Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008. – 184 с.

32. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление: математические модели. – М.: Физматлит, 2013. – 412 с.

33. Olson M. The Logic of Collective Action. Public Goods and the Theory of Groups. Harvard University Press: Cambridge, MA. 1965. – 176 p.

34. Weimann J., Brosig-Koch J., Heinrich T., Hennig-Schmidt H., Keser C. Public good provision by large groups – the logic of collective action revisited // European Economic Review. 2009. V. 118 (C). P. 348-363.

35. Diederich J., Goeschl T., Waichman I. (2016). Group size and the (in)efficiency of pure public good provision // European Economic Review. 2016. V. 85(1). P. 272-287.

36. Nosenzo D., Quercia S., Sefton M. Cooperation in small groups: the effect of group size. Experimental Economics. 2015. No 1. P. 4-14.

37. Остром Э. Управляя общим: эволюция институтов коллективной деятельности. Пер. с англ. – М.: ИРИСЭН, 2011. – 447 с.

38. Hilbe C., Sigmund K. Incentives and opportunism: From the carrot to the stick // Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences. 2010. V. 277 (1693). P. 2427-2433.

39. Carpenter J.P. The demand for punishment // Journal of Economic Behavior and Organization. 2007. No 4. P. 522-542.

40. Sefton, M., Shupp, R., Walker J.M. The effects of rewards and sanctions in provision of public goods // Economic Inquiry. 2007. No 4. P. 671-690.

41. Walker J.M., Halloran W.A. Rewards and sanctions and the provision of public goods in one-shot settings // Experimental Economics. 2004. No 7. P. 235–247.

42. Цуриков В.И., Скаржинская Е.М. К вопросу об устойчивости малой коалиции в большом коллективе. Часть 2 // Теоретическая экономика. 2023. № 5 (101). С. 43-52.

43. Hamilton J., Slutsky S. Endogenous timing in duopoly games: Stackelberg or Cournot equilibria // Games and Economic Behavior. 1990. No 2. P. 29-46.

Comparing the Nash and Stackelberg Equilibria in a Collective Action Model

Tsurikov Vladimir Ivanovich

Doctor of Economics, Professor,
Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russian Federation.
E-mail: tsurikov@inbox.ru

Skarzhinskaya Elena Matveevna

Doctor of Economics, Professor,
Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation.
E-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

Annotation. This study compares collective action outcomes under varying coordination conditions using mathematical modeling. The assumption is that the collective's members receive a cumulative income, which increases with the escalation of their efforts and adheres to the law of diminishing returns. The impact of coordination on the effectiveness of their actions is attributed to the complementarity of efforts, which implies that an increase in the effort made y each agent results in an increase in the marginal income from the efforts of any other agent. The formation of a coalition (small group), whose members strive to maximize coalition gains, allows the collective to avoid the Nash bad equilibrium trap, into which it falls when each member chooses the scope of their effort autonomously. We analyze and compare the outcomes of two games involving a coalition: a simultaneous game where Nash equilibrium is achieved, and a sequential game where Stackelberg equilibrium is achieved. In the sequential game, coalition members assume the leader's role and are therefore the first to implement their efforts. All non-cooperative agents act as followers and decide on their effort scope depending on the efforts already made by coalition members. Consequently, considering each non-cooperative agent's aim to maximize their individual gain given their knowledge about the relative size of coalition efforts, coalition members determine the optimal scope of their efforts using backward induction. As a result of the coalition's Stackelberg strategy, the aggregate revenue and each team member's payoff in the sequential game is greater than in the simultaneous coalition game.

Keywords: Collective action, coalition, Nash equilibrium, Stackelberg strategy, Pareto efficiency