

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 691.335:666.9-1

DOI: 10.52957/2782-1919-2026-7-1-56-70

Оптимизации состава вяжущего для бетонов специального назначения с использованием активного эксперимента

В.Е. Румянцева, А.А. Овчинников, Д.В. Обручев, М.Г. Есина

Варвара Евгеньевна Румянцева^{1,2}, Дмитрий Витальевич Обручев¹

¹Ивановский государственный политехнический университет, Иваново, Российская Федерация
varyym@gmail.com, d.v.obruchev@i-meb.ru

Александр Александрович Овчинников^{2,*}, Есина Марина Геннадьевна²

²Ивановская пожарно-спасательная академия государственной пожарной службы МЧС России,
Иваново, Российская Федерация
*nisigasa@mail.ru**, *mail@edufire37.ru*



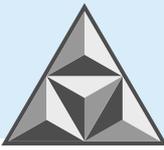
Рассмотрены результаты экспериментальных исследований вяжущей композиции «феррохромовый шлак – жидкое стекло» с целью оптимизации состава и изучения влияния на него различных качественных и количественных факторов. Представлены результаты математического планирования, а также данные натурного эксперимента и оценки адекватности математической модели. Приведены расчеты экстремума полученной математической функции в пятимерном факторном пространстве и определены значения варьируемых факторов, соответствующих максимальной прочности системы «феррохромовый шлак – жидкое стекло».

Ключевые слова: композиты специального назначения, шлакощелочное вяжущие, экспериментальные исследования, математическое моделирование, оптимизация

Для цитирования:

Румянцева В.Е., Овчинников А.А., Обручев Д.В., Есина М.Г. Оптимизации состава вяжущего для бетонов специального назначения с использованием активного эксперимента // *Умные композиты в строительстве*. 2026. Т. 7, вып. 1. С. 56-70.
URL: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/7081/view>

DOI: 10.52957/2782-1919-2026-7-1-56-70



SCIENTIFIC ARTICLE

DOI: 10.52957/2782-1919-2026-7-1-56-70

Optimization of binder composition for special-purpose concrete using active experimentation

V.E. Rumyantseva, A.A. Ovchinnikov, D.V. Obruchev, M.G. Esina

Varvara Evgenievna Rumyantseva^{1,2}, Dmitriy Vitalievich Obruchev¹

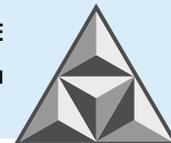
¹Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, Russian Federation

varrym@gmail.com, d.v.obruchev@i-meb.ru

Aleksandr Aleksandrovich Овчинников^{2,*}, Marina Gennadievna Esina²

²Ivanovo Fire and Rescue Academy of the State Fire Service of the Ministry of Emergency Situations of Russia,
Ivanovo, Russian Federation

nisigasa@mail.ru, mail@edufire37.ru*



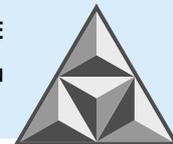
The paper discusses the results of experimental studies on the 'ferrochrome slag – liquid glass' binder composition. The purpose of the study is to optimise the composition and to investigate the impact of various qualitative and quantitative factors on it. The paper presents the results of mathematical planning, data from full-scale experiments, and an assessment of the adequacy of the mathematical model. The authors present calculations of the extremum of the resulting mathematical function in a five-dimensional factorial space and determine the values of the variable factors corresponding to the maximum strength of the 'ferrochrome slag – liquid glass' system.

Keywords: special purpose composites, slag-alkaline binders, experimental research, mathematical modeling, optimization

For citation:

Rumyantseva V.E., Ovchinnikov A.A., Obruchev D.V., Esina M.G. Optimization of binder composition for special-purpose concrete using active experimentation // *Smart Composite in Construction*. 2026. Vol. 7, Iss. 1. P. 56-70. URL: <https://comincon.ru/en/nauka/issue/7081/view>

DOI: 10.52957/2782-1919-2026-7-1-56-70



ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных материалов для получения бетонов специального назначения являются шлакощелочные вяжущие. Бетон на основе таких вяжущих характеризуется экономичностью и может обладать улучшенными физико-механическими свойствами. При этом в состав вяжущих обычно входят шлаки (аморфная фаза) и минералы пониженной гидравлической активности, которые способны к гидратации и твердению при правильном выборе способа активации. Так, щелочная активация позволяет максимально использовать гидравлические свойства шлаков; действующим компонентом выступает раствор щелочей или солей щелочных металлов [1].

Хорошо зарекомендовали себя и достаточно глубоко изучены системы, в которые входят доменные шлаки черной металлургии, содержащие силикаты кальция и водный раствор силиката натрия – жидкого стекла. Одним из перспективных отвердителей жидкого стекла является саморассыпающийся феррохромовый шлак – активированный за счет полиморфного превращения и распада скрыто-гидравлический материал с преобладающей кристаллической и вместе с тем высокодефектной структурой. Его успешное применение в шлакощелочных вяжущих связано с высокой удельной поверхностью и легкостью разложения кристаллических силикатов кальция и магния, что позволяет считать его уникальным сырьем в линейке техногенных продуктов для строительной индустрии.

Феррохромовый шлак является побочным продуктом выплавки феррохрома в рудно-термических печах. Основные сырьевые компоненты – хромитовая руда (FeCr_2O_4), восстановитель (кокс) и флюсы (известняк, доломит). Механизм саморассыпания заключается в том, что при медленном охлаждении расплава (на воздухе в отвалах) доминирующая фаза – белит ($2\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2$, C_2S) при $675\text{--}525^\circ\text{C}$ существует в высокотемпературных β - и α' -модификациях, стабилизированных ионами Cr, Al, Fe. При охлаждении ниже температуры 525°C происходит полиморфное превращение $\beta\text{-C}_2\text{S} \rightarrow \gamma\text{-C}_2\text{S}$ (ларинит), который имеет значительно меньшую плотность (3.0 против $3.3 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ у $\beta\text{-C}_2\text{S}$). Удельный объем возрастает на 12% , что создает в монолитном куске шлака внутренние напряжения и приводит к его самопроизвольному растрескиванию и распаду на мелкодисперсный порошок в течение нескольких часов или дней. Этот порошок после распада имеет широкий фракционный состав; без дополнительного помола удельная поверхность по Блейну составляет $250\text{--}450 \text{ м}^2\cdot\text{кг}^{-1}$. Истинная плотность шлака составляет $3.1\text{--}3.4 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, что выше, чем у портландцемента ($3.1 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$) из-за содержания тяжелых оксидов Mg, Cr, Fe. Насыпная плотность – $1000\text{--}1400 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; гидратационная активность – крайне низкая. Он проявляет высокую пуццолановую и скрыто-гидравлическую активность только при активации щелочами (NaOH, жидкое стекло) или сульфатами (гипс) [2].

Отверждение феррохромового шлака может происходить за счет щелочной активации. Например, при использовании жидкого стекла за счет высоких значений pH среды наблюдается разрушение стекловидной фазы шлака. При этом высвобождаются свободные ионы Ca, Si, Al с последующей поликонденсацией и образованием низкоосновных гидросиликатов и гидроалюмосиликатов натрия по типу N-A-S-H-гелей и CSH-геля. Рентгенофазовый анализ (РФА) показывает, что исходными фазами шлака являются минералы мелилита (геленита), монтичеллита, форстерита, периклаза (MgO), остаточного хромита (FeCr_2O_4). Саморассыпаемость подтверждается проявлением пика $\gamma\text{-C}_2\text{S}$ (ларинита) при температуре 29°C ($d = 3.03 \text{ \AA}$) вместо β -модификации. Продукты гидратации представлены аморфной фазой: гало – широкая размытая область в интервале $25\text{--}35^\circ\text{C}$, что свидетельствует о формировании аморфных или нанокристаллических гелей C-A-S-H, N-A-S-H. Также РФА указывает на наличие гидрогранатов: на дифрактограмме присутствуют пики



гидрогранатового ряда (гидрогроссуляра) типа C_3AH_6 (кубический) или его замещенных форм (с Si, Fe). Установлено присутствие карбонатной фазы – кальцит ($CaCO_3$), натрит (Na_2CO_3) или смешанных фаз (типа пирсонита). Их наличие свидетельствует о неполной растворимости исходного шлака в щелочи [3, 4].

При анализе данных РФА видно, что пики исходных минералов шлака со временем уменьшаются, а аморфный гало нарастает. Кристаллические гидросиликаты (типа тоберморита), характерные для портландцемента, проявляются слабо. Фазовая картина – «аморфный фон», остатки непрореагировавших кристаллов шлака и возможные гидрогранаты/карбонаты [5, 6].

Дифференциальная сканирующая калориметрия и термогравиметрический анализ (ТГА) (фазовые переходы и потери массы при нагревании) указывают на разложение неустойчивых гидратных фаз. Эндотермический эффект при температурах от 80 до 150°C связан с удалением физически и химически связанной воды из гелевых фаз (C-A-S-H, N-A-S-H). Ширина пика коррелирует со степенью полимеризации геля. Эндотермический эффект при 150-300°C свидетельствует о дегидратации более упорядоченных слоистых структур (аналогичных алюминатной части тоберморита) или гидрогранатов. Резкий экзотермический эффект в области 800-900°C связан с кристаллизацией из аморфного геля новых силикатных фаз (например, волластонита). Потеря массы на кривой, полученной при ТГА, количественно определяет общее содержание гидратных фаз. Для хорошо прореагировавшей системы потери массы вблизи 1000°C могут достигать 12-18%. Можно идентифицировать также разложение кальцита (600-750°C) и натрита/термонатрита (400-500°C) [7, 8].

По данным электронной микроскопии, на ранних стадиях твердения (часы/дни) видны непрореагировавшие гладкие зерна шлака, окруженные рыхлыми чешуйчатыми или игольчатыми гелевыми образованиями. Зрелая структура (28 сут. и более) характеризуется плотной однородной гелевой матрицей с включением остаточных зерен шлака. Эта матрица имеет глазуреподобный или плотно-чешуйчатый вид, что сильно отличает ее от игольчато-фибрилярного CSH-геля, характерного для портландцемента. По данным энергодисперсионной спектроскопии (ЭДС), химический состав системы в микрозоне типичен для геля с переменным составом: наблюдается высокое содержание Si, Al, Ca, Na, присутствие Mg, иногда следы Cr. При этом соотношение Ca/Si (0.5-1.2) обычно ниже, чем в портландцементном CSH (> 1,5), а соотношение (Na+K)/Si, напротив, существенно выше. Это подтверждает формирование гибридного C-N-A-S-H-геля или смеси CSH-подобных и N-A-S-H-фаз [9].

Основными факторами, влияющими на прочностные свойства шлакощелочного вяжущего с отвердителем феррохромовым шлаком, являются свойства жидкого стекла (плотность и силикатный модуль), а также минералогический состав и удельная поверхность шлака. Кроме того, протекание реакции между шлаком и жидким стеклом определяет температура: от нее зависит скорость схватывания и твердения, а также фазовый состав продуктов гидратации.

Низкая плотность жидкого стекла (< 1.30 г·см⁻³) приводит к недостатку щелочи; как следствие, происходит медленный набор прочности материала и образование рыхлой структуры. При оптимальной плотности (1.25-1.45 г·см⁻³) обеспечивается баланс между количеством щелочи, необходимым для разрушения шлака, и количеством кремнезема, достаточным для формирования прочных гелей. В свою очередь, высокая плотность жидкого стекла (> 1.5 г·см⁻³) резко увеличивает вязкость смеси, создает проблемы с удобоукладываемостью, приводит к быстрому схватыванию и риску образования высолов в строительном материале из-за избытка натрия.



Силикатный модуль жидкого стекла ($M = \text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$) – ключевой параметр, определяющий соотношение между кремнеземистым и щелочным компонентами. При низком модуле ($M < 2.0$) активирующая способность жидкого стекла очень сильная, схватывание происходит быстро, но прочность может быть невысокой вследствие формирования слабо полимеризованных силикатных структур, не связанных в гель, и избытка щелочи. Оптимальный модуль вяжущего (2.5-3.2) отвечает балансу между щелочью, необходимой для активации, и кремнеземом для полимеризации. Такое значение способствует образованию плотных высокополимеризованных N-A-S-H- и CSH-гелей, что в итоге обеспечивает максимальную прочность строительного материала. Высокий модуль жидкого стекла ($M > 3.5$) приводит к недостатку щелочи и, как следствие, медленному развитию прочности, хотя конечная микроструктура может быть плотной. При этом смесь часто бывает слишком вязкой [10].

Саморассыпающийся феррохромовый шлак уже имеет высокую дисперсность и удельную поверхность (до $450 \text{ м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$), а дополнительный помол ее только увеличивает. Повышение удельной поверхности резко влияет на реакционную способность шлака: открываются большие возможности для щелочного воздействия. Это ускоряет процессы растворения и гидратации, способствует быстрому набору прочности на ранних стадиях и формированию более однородной и плотной микроструктуры. В то же время чрезмерно высокая удельная поверхность может привести к неоправданному увеличению водопотребности композиции и количества добавки активатора. Для саморассыпающегося шлака часто существует оптимальная степень помола, при превышении которой прирост прочности становится незначительным.

Температура твердения также существенно влияет на скорость протекающих процессов. Повышенная температура ($40\text{-}95^\circ\text{C}$) при тепловлажностной обработке значительно ускоряет химические реакции активации и полимеризации, что позволяет за короткое время достигать высокой прочности. Твердение в нормальных условиях при температуре $20\text{-}25^\circ\text{C}$ идет медленнее, но при достаточной активности шлака и оптимальном составе композиции конечная прочность может быть сопоставима или даже выше, чем при тепловой обработке, ввиду формирования более равновесной и плотной микроструктуры [11].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

При исследовании свойств вяжущей композиции «феррохромовый шлак – жидкое стекло» в качестве критерия оптимизации нами выбрана механическая прочность как наиболее показательная физико-механическая характеристика цементного камня. В качестве контролируемой величины был принят предел прочности на сжатие после твердения в течение 1 сут.

При создании математической модели выбран ротатабельный план Бокса- Хантера [12, 13]. За независимые переменные принимали: X_1 – силикатный модуль жидкого стекла; X_2 – плотность раствора жидкого стекла, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$; X_3 – содержание жидкого стекла в смеси, % от массы шлака; X_4 – удельная поверхность порошка феррохромового шлака (по методу воздухопроницаемости), $\text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$; X_5 – температура среды, $^\circ\text{C}$. Химический состав шлака: SiO_2 – 28.30%, Al_2O_3 – 7.10%, Fe_2O_3 – 0.25%, CaO – 51.80%, MgO – 7.52%, Cr_2O_3 – 3.50%, процент при прокаливании – 0.89. По результатам обработки данных составлен полином (1):

$$Y_i = B_0 + \sum B_i X_i + \sum B_{ij} X_i X_j + \sum B_{ii} X_i^2 + \dots + \sum \sum B_{ii} X_i^{m_i}. \quad (1)$$

Границы областей исследования представлены в неявной и явной формах; интервалы варьирования независимых переменных и основные уровни приведены в табл. 1, 2.

**Таблица 1.** Показатели независимых переменных в неявной форме**Table 1.** Implicit measures of implicit variables

Независимые переменные	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
Основной уровень	0	0	0	0	0
Граничные области	+2	+2	+2	+2	+2
	+1	+1	+1	+1	+1
	-1	-1	-1	-1	-1
	-2	-2	-2	-2	-2

Таблица 2. Показатели независимых переменных в явной форме**Table 2.** Explicit measures of independent variables

Независимые переменные	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅
Основной уровень	3.00	1350	60	300	20
Интервал варьирования	0.25	50	20	75	5
Граничные области	3.50	1450	100	450	30
	3.25	1400	80	375	25
	2.75	1300	40	225	15
	2.50	1250	20	150	10

Функция отклика – это предел прочности при сжатии кубиков 100×100×100 мм, полученных при смешивании жидкого натриевого стекла с феррохромовым шлаком и затвердевших в течение 1 сут. на решетке ванны с гидравлическим затвором.

Коэффициенты уравнения регрессии (1) вычисляли:

$$B_0 = 0.1591 \sum y_i - 0.0341 \sum x_i \cdot y_i; \quad (2)$$

$$B_i = 0.047 \sum x_i \cdot y_i; \quad (3)$$

$$B_{ij} = 0.0625 \sum x_i \cdot x_j \cdot y_i; \quad (4)$$

$$B_{ii} = 0.0312 \sum x_i \cdot y_i + 0.0028 \sum x_i \cdot y_i - 0.0341 \sum y_i. \quad (5)$$

По результатам обработки данных (табл. 3) составлен полином в неявной форме:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & 14.59 + 10.04 X_1 + 3.5 X_2 + 4.74 X_3 + 0.74 X_4 + 0.69 X_5 + 1.48 X_1 X_2 + 2.97 X_1 X_3 + \\ & + 0.28 X_1 X_4 - 0.19 X_1 X_5 - 0.72 X_2 X_3 - 0.26 X_2 X_4 + 0.39 X_2 X_5 + 0.48 X_3 X_4 - 0.18 X_3 X_5 - \\ & - 0.78 X_4 X_5 + 3.62 X_1 - 0.74 X_2 - 1.46 X_3 + 1.48 X_4 + 0.58 X_5. \end{aligned} \quad (6)$$

Оценку адекватности полинома выполняли, базируясь на значениях величин дисперсии воспроизводимости ($S^2_{\text{воспр.}}$) и остаточной дисперсии ($S^2_{\text{ост.}}$):

$$S^2_{\text{воспр.}} = (\sum (y_i - \bar{y})^2) / (n_0 - 1) = 1.6150 / (6 - 1) = 0.323; \quad (7)$$

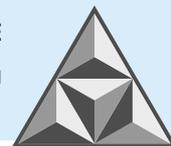
$$S^2_{\text{ост.}} = (\sum (y_i - \hat{y}_i)^2) / (N - 1) = 190.2642 / (32 - 21) = 17.2968. \quad (8)$$

Для проверки адекватности полинома сравнивали расчетный критерий Фишера ($F_{\text{расчет}}$) с табличным значением квантиля распределения Фишера (F_{1-p}) для уровня значимости $p = 0.05$. При $f_1 = 6$ и $f_2 = 5$ имеем $F_{1-p} = 5$. Расчетное значение критерия Фишера находят из отношения остаточной дисперсии к дисперсии адекватности ($S^2_{\text{ад.}}$).

Находим дисперсию адекватности:

$$S^2_{\text{ад.}} = (S^2_{\text{ост.}} \cdot f_{\text{ост.}} - S^2_{\text{воспр.}} \cdot f_{\text{воспр.}}) / f_{\text{ад.}} = (17.2968 \cdot 11 - 0.323 \cdot 5) / [32 - 21 - (6 - 1)] = 31.4415.$$

Значение $F_{\text{расчет.}} = 17.2968/31.4415$ меньше $F_{1-p} = 6$, что указывает на адекватность полинома.

**Таблица 3.** Опытные данные и результаты их обработки**Table 3.** Experimental data and results of their processing

Опыт	y_i	\hat{Y}_i	$(y_i - \hat{Y}_i)$	$(y_i - \hat{Y}_i)^2$	\hat{Y}_i	$(y_i - \hat{Y}_i)$	$(y_i - \hat{Y}_i)^2$
1	43.5	46.74	3.24	10.4976			
2	13.6	17.02	3.42	11.6964			
3	36.5	39.64	3.14	9.8596			
4	12.5	14.70	2.20	4.8400			
5	29.6	31.58	1.98	3.9204			
6	10.5	14.88	4.38	19.1844			
7	16.3	20.48	4.18	17.4724			
8	8.4	9.34	0.94	0.8836			
9	39.0	38.89	0.11	0.0121			
10	11.7	13.79	2.09	4.3681			
11	30.1	31.98	1.88	3.5344			
12	8.9	10.94	2.04	4.1616			
13	28.3	29.16	0.86	0.7396			
14	7.7	8.54	0.84	0.7056			
15	13.7	14.30	0.60	0.3600			
16	6.4	6.22	0.18	0.0324			
17	9.6	8.99	0.61	0.3721			
18	37.8	42.57	4.77	22.7529			
19	5.7	4.61	1.09	1.1881			
20	17.6	18.65	1.05	1.1025			
21	4.4	0.73	3.67	13.4689			
22	14.9	18.23	3.33	11.0889			
23	9.4	15.03	5.63	31.6969			
24	26.2	25.90	0.21	0.0441			
25	12.1	15.53	3.43	11.7649			
26	18.5	18.29	0.21	0.0441			
27	15.2	14.59	0.61	0.3721	15.35	0.15	0.0225
28	14.6	14.59	0.01	0.0001	15.35	0.75	0.5625
29	14.9	14.59	0.31	0.0961	15.35	0.45	0.2025
30	16.1	14.59	1.51	2.2801	15.35	0.75	0.5625
31	15.8	14.59	1.21	1.4641	15.35	0.45	0.2025
32	15.1	14.59	0.51	0.2601	15.35	0.25	0.0625
	365.0			190.2642	92.10		1.6150

Оценку погрешностей коэффициентов полинома (1) находили из выражений:

$$S_B = \sqrt{0.159110 \cdot S_{\text{воспр.}}^2} = 0.23;$$

$$S_B = \sqrt{0.0417 \cdot S_{\text{воспр.}}^2} = 0.12;$$

$$S_B = \sqrt{0.0625 \cdot S_{\text{воспр.}}^2} = 0.14;$$

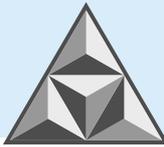
$$S_B = \sqrt{(0.0312 + 0.0028) \cdot S_{\text{воспр.}}^2} = 0.10.$$

Значимость коэффициентов полинома (1) проверяли по критерию Стьюдента с применением формул:

$$t_i = B_i / S_B; \quad (9)$$

$$t_{ij} = B_{ij} / S_B; \quad (10)$$

$$t_{ii} = B_{ii} / S_B. \quad (11)$$



Для экспериментальных данных имеем:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 14.59 / 0.23 = 63.43; & t_{12} &= 1.48 / 0.14 = 10.57; \\
 t_1 &= 10.04 / 0.12 = 83.67; & t_{13} &= 2.97 / 0.14 = 21.21; \\
 t_2 &= 3.51 / 0.12 = 29.25; & t_{14} &= 0.28 / 0.14 = 2.00; \\
 t_3 &= 4.74 / 0.12 = 39.50; & t_{15} &= 0.19 / 0.14 = 1.36; \\
 t_4 &= 2.74 / 0.12 = 22.83; & t_{23} &= 0.72 / 0.14 = 5.14; \\
 t_5 &= 0.69 / 0.12 = 5.75; & t_{24} &= 0.26 / 0.14 = 1.86; \\
 t_{11} &= 3.62 / 0.10 = 36.20; & t_{25} &= 0.39 / 0.14 = 2.79; \\
 t_{22} &= 0.74 / 0.10 = 7.40; & t_{34} &= 0.48 / 0.14 = 3.43; \\
 t_{33} &= 1.46 / 0.10 = 14.60; & t_{35} &= 0.18 / 0.14 = 1.29; \\
 t_{44} &= 14.48 / 0.10 = 14.80; & t_{45} &= 0.78 / 0.14 = 5.57; \\
 t_{55} &= 0.58 / 0.10 = 5.80.
 \end{aligned}$$

При табличном квантиле распределения Стьюдента $t = 5.60$ к незначимым коэффициентам полинома (1) относят коэффициенты последовательно от B_{14} до B_{45} .

Переход от безразмерных переменных к натуральным осуществляют с применением выражений:

$$X_i = (Z_i - Z_i^0) / Z_i; \text{ где } i = 1, 2, \dots, R; \quad (12)$$

$$Z_i^0 = (Z_i^{\max} + Z_i^{\min}) / 2; \quad (13)$$

$$Z_i = (Z_i^{\max} - Z_i^{\min}) / 2. \quad (14)$$

После преобразования полинома (1) получаем расчетное уравнение:

$$\begin{aligned}
 Y &= 45.77 - 116.30 Z_1 + 0.15 Z_2 - 0.22 Z_3 - 0.02 Z_4 - 0.17 Z_5 + 0.03 Z_1 Z_2 + 0.15 Z_1 Z_3 + \\
 &+ 14.48 Z_1^2 - 0.00008 Z_2^2 - 0.0009 Z_3^2 + 0.00007 Z_4^2 + 0.006 Z_5^2.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, при выборе номинального состава вяжущего использовали формализованное сочетание независимых переменных расчетной модели (15), которая показала максимально высокое значение приоритетного свойства оптимизации – механической прочности цементного камня при твердении в нормальных условиях в течение 1 сут.

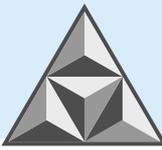
ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученное расчетное уравнение позволяет продолжить исследовательскую работу по оптимизации состава вяжущей композиции «феррохромовый шлак – жидкое стекло» (перенесение модели на реальный объект). Анализируя знаки при квадратичных членах, можно утверждать, что в пятифакторном пространстве лежит минимакс, то есть истинный максимум целевой функции уходит за границы варьирования (соответственно, глобального максимума нет). Поэтому оптимальный состав нужно искать на границах факторного пространства (данные табл. 2).

Полученный при обработке результатов эксперимента полином (15) будет иметь ограничения: $2.5 \leq Z_1 \leq 3.5$; $1250 \leq Z_2 \leq 1450$; $20 \leq Z_3 \leq 100$; $150 \leq Z_4 \leq 450$; $10 \leq Z_5 \leq 30$.

Квадратичная функция (выпуклая/вогнутая) по разным переменным:

по Z_1 коэффициент $14.48 > 0 + 14.48 > 0 \Rightarrow$ выпуклая \Rightarrow на отрезке максимум на одном из концов;



по Z_2 коэффициент $-0.00008 < 0 - 0.00008 < 0 \Rightarrow$ вогнутая \Rightarrow максимум внутри или на границе, но так как линейный член $+0,15 Z_2$ мал, а квадрат мал по модулю, максимум по Z_2 будет на верхней границе $Z_2 = 1450$ (проверим позже);

по Z_3 коэффициент $-0.0009 < 0 - 0.0009 < 0 \Rightarrow$ вогнутая;

по Z_4 коэффициент $+0.00007 > 0 + 0.00007 > 0 \Rightarrow$ выпуклая \Rightarrow максимум на концах отрезка;

по Z_5 коэффициент $+0.006 > 0 + 0.006 > 0 \Rightarrow$ выпуклая \Rightarrow максимум на концах.

Значит, кандидаты на максимум – вершины прямоугольной области ($2^5 = 32$ точки).

Из-за вогнутости по Z_2 и Z_3 максимум может быть не в вершине, а на границе по Z_2 или Z_3 где-то внутри.

Функция сепарабельна по Z_4 и Z_5 , в том смысле, что они не взаимодействуют с другими переменными, кроме своих квадратов и линейных членов. Таким образом, уравнение (15) будет выглядеть следующим образом (16):

$$Y = [14.48 Z_1^2 - 116.30 Z_1 + 0.03 Z_1 Z_2^2 + 0.15 Z_1 Z_3] + [0.15 Z_2 - 0.00008 Z_2^2] + [-0.22 Z_3 - 0.0009 Z_3^2] + \quad (16) \\ + [-0.02 Z_4 + 0.00007 Z_4^2] + [-0.17 Z_5 + 0.006 Z_5^2] + 45.77.$$

Рассмотрим каждую часть:

а) по Z_4

$f_4(Z_4) = -0.02 Z_4 + 0.00007 Z_4^2$, выпуклая, ее производная:

$f_4' = -0.02 + 0.00014 Z_4 = 0 \Rightarrow Z_4 = 142.857$ – минимум (так как функция выпуклая). Значит, максимум на отрезке $150 \leq Z_4 \leq 450$ будет на правом конце: $Z_4 = 450$. Чем больше Z_4 , тем больше f_4 при таких малых коэффициентах.

Проверим значения:

$$f_4(150) \approx -0.02 \times 150 + 0.00007 \times 22500 = -3 + 1.575 = -1.425.$$

$$f_4(450) \approx -9 + 0.00007 \times 202500 = -9 + 14.175 = 5.175.$$

Да, правая граница больше. Итак, $Z_4^* = 450$.

б) по Z_5

$f_5(Z_5) = -0.17 Z_5 + 0.006 Z_5^2$, выпуклая, ее производная

$f_5' = -0.17 + 0.012 Z_5 = 0 \Rightarrow Z_5 = 14.1667$, минимум внутри отрезка $[10, 30]$. Максимум на концах:

$$f_5(10) = -1.7 + 0.006 \times 100 = -1.7 + 0.6 = -1.1.$$

$$f_5(30) = -5.1 + 0.006 \times 900 = -5.1 + 5.4 = 0.3.$$

$0.3 > -1.1$, максимум в $Z_5 = 30$.

Итак, $Z_5^* = 30$.

По Z_2, Z_3, Z_1 взаимосвязаны.

Оставшаяся часть:

$$G(Z_1, Z_2, Z_3) = 14.48 Z_1^2 - 116.30 Z_1 + 0.03 Z_1 Z_2 + 0.15 Z_1 Z_3 + 0.15 Z_2 - 0.00008 Z_2^2 - 0.22 Z_3 - 0.0009 Z_3^2.$$

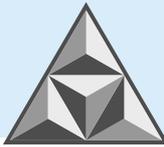
Плюс константа и уже выбранные $Z_4 = 450$ и $Z_5 = 30$.

По Z_2 внутри функции G :

$$\partial G / \partial Z_2 = 0.03 Z_1 + 0.15 - 0.00016 Z_2 = 0 \Rightarrow Z_2 = (0.03 Z_1 + 0.15) / 0.00016.$$

По Z_3 :

$$\partial G / \partial Z_3 = 0.15 Z_1 - 0.22 - 0.0018 Z_3 = 0 \Rightarrow Z_3 = (0.15 Z_1 - 0.22) / 0.0018.$$



Оба эти выражения для Z_2 , Z_3 могут дать внутренний максимум G при фиксированном Z_1 , но они должны лежать в пределах своих отрезков.

Поскольку $Z_1 \in [2.5, 3.5]$:

при $Z_1 = 2.5$ $Z_2 = (0.075 + 0.15)/0.00016 = 0.225/0.00016 = 1406.25$ внутри отрезка $[1250, 1450]$,

при $Z_1 = 3.5$ $Z_2 = (0.105 + 0.15)/0.00016 = 0.255/0.00016 = 1593.75$ (больше 1450).

То есть при росте Z_1 оптимальное Z_2 растет и быстро выходит за правую границу 1450. Значит, для Z_1 от 2.5 до некоторого Z_{1max} можем брать внутренний оптимум по Z_2 , а далее Z_2 надо фиксировать на 1450.

Аналогично для Z_3 . При $Z_1 = 2.5$

$Z_3 = (0.375 - 0.22)/0.0018 = 0.155/0.0018 \approx 86.111$ внутри отрезка $[20, 100]$.

При $Z_1 = 3.5$, $Z_3 = (0.525 - 0.22)/0.0018 = 0.305/0.0018 \approx 169.444$ (больше 100).

То есть при росте Z_1 оптимальное Z_3 тоже растет и выходит за границу 100.

Разобьем на случаи.

Случай 1:

Z_2 и Z_3 внутренние (удовлетворяют градиентным условиям).

Это будет при таких Z_1 , что:

$$Z_2^* \leq 1450.$$

$$(0.03Z_1 + 0.15)/0.00016 \leq 1450.$$

$$0.03 Z_1 + 0.15 \leq 0.232.$$

$$0.03 Z_1 \leq 0.082.$$

$$Z_1 \leq 2.7333\dots$$

$$Z_3^* \leq 100.$$

$$(0.15 Z_1 - 0.22)/0.0018 \leq 100.$$

$$0.15 Z_1 - 0.22 \leq 0.18.$$

$$0.15 Z_1 \leq 0.40.$$

$$Z_1 \leq 2.666\dots$$

Более жесткое ограничение: $Z_1 \leq 2.666$.

При этом $Z_1 \geq 2.500$ (по условию), так что $Z_1 \in [2.500, 2.666\dots]$.

В этом диапазоне Z_2^* , Z_3^* будут внутри своих границ.

Тогда G при подстановке $Z_2^*(Z_1)$, $Z_3^*(Z_1)$ становится функцией только от Z_1 .

Мы уже изначально считали стационарную точку всех переменных одновременно, которая дала $Z_1 = 2.261$ (но точка не в области). Теперь мы ищем максимум на отрезке $Z_1 \in [2.500, 2.666]$.

Поскольку функция G квадратичная по Z_1 после подстановки Z_2^* , Z_3^* , лучше проверить значение Y в вершине и на концах этого малого диапазона.

Можно заметить: в стационарной точке всех 5 переменных Z_1 было 2.261, что меньше 2.500, и функция там имела некоторое значение. При сдвиге Z_1 вправо до 2.500, возможно, Y растет (так как выпуклая по Z_1 с положительным коэффициентом 14.48 \Rightarrow минимум в $Z_1 \approx 2.261$, а правая ветвь растет). Значит, на отрезке $Z_1 \in [2.500, 2.666]$ максимум будет на правом конце $Z_1 = 2.666$.

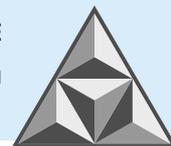
Случай 2:

$$Z_1 > 2.666.$$

Тогда $Z_3^* > 100$; Z_3 надо фиксировать на 100 (максимум по Z_3 на отрезке будет на границе, так как вогнутая). Для вогнутой $f_3(Z_3) = 0.15 Z_1 Z_3 - 0.22 Z_3 - 0.0009 Z_3^2$ (в рамках G , остальные члены не зависят от Z_3). Это квадратичная от Z_3 с коэффициентом $-0.0009 < 0$, значит, вершина – максимум. Если вершина за пределами справа, максимум на правой границе $Z_3 = 100$, если она слева – максимум на левой границе.

Вершина: производная

$$0.15 Z_1 - 0.22 - 0.0018 Z_3 = 0 \Rightarrow Z_3 = (0.15 Z_1 - 0.22) / 0.0018.$$



При $Z_1 > 2.666$ вершина > 100 , максимум по Z_3 будет при $Z_3 = 100$ (так как функция вогнутая, если вершина справа от отрезка, на этом отрезке максимум на правом конце).

Итак, при $Z_1 > 2.666$ берем $Z_3 = 100$.

Аналогично для Z_2 – вогнутая, вершина $Z_2 = (0.03 Z_1 + 0.15) / 0.00016$.

При $Z_1 > 2.733$ вершина > 1450 , значит, максимум на правом конце $Z_2 = 1450$.

При Z_1 между 2.666 и 2.733 вершина Z_2 внутри, можно брать внутренний оптимум Z_2^* .

Но проще перебрать граничные случаи, так как область небольшая.

Мы знаем, что $Z_4 = 450$, $Z_5 = 30$ дают максимум по ним. Проще вычислить Y в нескольких ключевых точках.

Точка А.

$Z_1 = 2.666$, $Z_2 = (0.03 \cdot 2.666 + 0.15) / 0.00016 = 1437.375$ – внутри.

$Z_3 = (0.15 \cdot 2.666 - 0.220) / 0.0018 = 99.944$ (почти 100).

Пусть $Z_3 = 100$.

Тогда подставим $Z_1 = 2.666$, $Z_2 = 1437.375$, $Z_3 = 100$, $Z_4 = 450$, $Z_5 = 30$.

Подставляем значения Z в (16) получаем $Y = 17.280$ МПа.

Надо проверить, возможно, большее значение будет при $Z_1 = 3.5$ (максимальном), $Z_2 = 1450$, $Z_3 = 100$, $Z_4 = 450$, $Z_5 = 30$.

Точка В.

Подставляем в (16) значения $Z_1 = 3.5$, $Z_2 = 1450$, $Z_3 = 100$, $Z_4 = 450$, $Z_5 = 30$. Значение $Y = 44.625$ МПа. $44.625 > 17.280$, следовательно, точка В является предпочтительной.

ВЫВОДЫ

Показано, что максимальная прочность шлакощелочного вяжущего $Y = 44.625$ МПа достигается при следующих факторах:

- силикатный модуль $Z_1 = 3.5$;
- плотность жидкого стекла $Z_2 = 1450$ кг·м⁻³;
- расход жидкого стекла по массе шлака $Z_3 = 100\%$;
- удельная поверхность шлака $Z_4 = 450$ м²·кг⁻¹;
- температура $Z_5 = 30^\circ\text{C}$.

Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Значения прочности экспериментальных образцов близки к максимальным для представленного табличного перечня параметров исходного состава шлакожидкостекляного вяжущего.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Гергишан С.В., Овчинников А.А., Ходова И.А.** Моделирование процесса прогрева строительной конструкции с защитным огнестойким покрытием // *Умные композиты в строительстве*. 2025. Т. 6. Вып. 1. С. 21-30. URL: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/5863/view> (дата обращения 20.12.2025).
2. Атлас шлаков. Справочник. М.: Металлургия, 1985. 208 с.
3. **Ковалев А.В., Дроженко К.В.** Бетоны на шлакощелочных вяжущих // *Технологии бетонов*. 2025. № 4 (201). С. 25-29.
4. **Ананенко А.А., Банул А.В.** Получение высокопрочных бетонов на шлакощелочных вяжущих // *Изв. высш. учеб. заведений. Строительство*. 2007. № 10 (586). С. 17-19.
5. **Глуховский В.Д., Кривенко П.В., Румына Г.В., Герасимчук В.Л.** Производство бетонов и конструкций на основе шлакощелочных вяжущих. Киев: Будівельник, 1988. 143 с.



6. **Петровская А.А., Каптюшина А.Г.** Исследование свойств шлакощелочных вяжущих и бетонов на их основе // *Строительные материалы*. 2021. № 10. С. 21-24.
7. **Федосов С.В., Серегин Г.В., Овчинников А.А.** Жаростойкий бетон для футеровки вагонеток и печей керамической промышленности // *Строительные материалы*. 2006. № 9. С. 9-11.
8. **Овчинников А.А.** Модифицированные шлакощелочные бетоны // *Ученые записки инж.-строит. фак-та*. Иваново, 2006. Вып. 3. С. 40-41.
9. **Provis J.L.** Geopolymers and other alkali activated materials: why, how, and what? // *Materials and Structures*. 2013. Vol. 47. P. 11-25.
10. **Glukhovskiy V.D., Rostovskaya G.S., Rumyna G.V.** High-Strength Slag-Alkaline Cements // *7th Inter. Congress on the Chemistry of Cement*. Paris, 1980. Vol. III. P. 164-168.
11. **Салония Л.Г., Самченко С.В., Скальный В.В.** Феррохромовые шлаки в строительных композициях // *Вестник МГСУ*. 2016. № 10. С. 104-115.
12. **Ординарцева Н.П.** Математическая модель измерительной задачи // *Известия ЮТУ. Техн. науки. Тем. вып. «Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении»*. Таганрог: изд-во ТГИ ЮТУ. 2012. № 5 (130). С. 90.
13. **Федосов С.В., Баканов М.О., Александрова О.В., Разговоров П.Б., Кузнецов И.А.** Комплексное математическое моделирование в управлении физико-химическими процессами при транспортировке бетонной смеси // *Умные композиты в строительстве*. 2025. Т. 6. Вып. 4. С. 23-42. URL: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/6779/view> (дата обращения 20.12.2025).

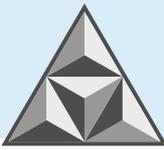
Поступила в редакцию 07.02.2026

Одобрена после рецензирования 28.02.2026

Принята к опубликованию 06.03.2026

REFERENCES

1. **Gergishan, S.V., Ovchinnikov, A.A. and Khodova, I.A.** (2025), Modelling of the heating process of a building structure with a protective fire-resistant coating, *Umyne kompozity v stroitel'stve [Smart Composite in Construction]*, vol. 6, no. 1, pp. 21-30 (in Russian). Available at: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/5863/view> (accessed 20.12.2025).
2. Slag atlas (1985), Handbook. Metallurgy, Moscow, 208 p. (in Russian).
3. **Kovalev, A.V. and Drozhenko, K.V.** (2025), Concrete on slag-alkaline binders, *Tekhnologii betonov [Concrete technologies]*, vol. 4, no. 201, pp. 25-29 (in Russian).
4. **Ananenko, A.A. and Banul, A.V.** (2007), Obtaining high-strength concrete on slag-alkaline binders, *Izv. vyssh. ucheb. zavedenii. Stroitel'stvo [Proceedings of higher educational institutions. Construction]*, no. 10 (586), pp. 17-19 (in Russian).
5. **Glukhovskiy, V.D., Krivenko, P.V., Rumyna, G.V. and Gerasimchuk, V.L.** (1988), Production of concrete and structures based on slag-alkaline binders. Kyiv: Budivelnik, 143 p. (in Russian).
6. **Petrovskaya, A.A. and Kaptyushina, A.G.** (2021), Study of the properties of slag-alkaline binders and concretes based on them, *Stroitel'nye materialy [Construction materials]*, no. 10, pp. 21-24 (in Russian).
7. **Fedosov, S.V., Seryogin, G.V. and Ovchinnikov, A.A.** (2006), Heat-resistant concrete for lining trolleys and furnaces of the ceramic industry, *Stroitel'nye materialy [Construction materials]*, no. 9, pp. 9-11 (in Russian).
8. **Ovchinnikov, A.A.** (2006), Modified slag-alkaline concretes, *Uchenye zapiski inzh.-stroit. fak-ta [Scientific notes of the Faculty of Civil Engineering]*, Ivanovo, iss. 3, pp. 40-41 (in Russian).
9. **Provis, J.L.** (2013), Geopolymers and other alkali activated materials: why, how, and what?, *Materials and Structures*, vol. 47, pp. 11-25.
10. **Glukhovskiy, V.D., Rostovskaya, G.S. and Rumyna, G.V.** (1980), High-Strength Slag-Alkaline Cements, *7th Inter. Congress on the Chemistry of Cement*, Paris, vol. III, pp. 164-168.
11. **Saloniya, L.G., Samchenko, S.V. and Skal'nyj, V.V.** (2016), Ferrochromic slags in building compositions, *Bulletin of MGSU*, no. 10, pp. 104-115 (in Russian).



12. **Ordinartseva, N.P.** (2012), Mathematical model of the measurement problem, *Izvestiya YuTU. Tekhn. nauki. Tem. vyp. «Komp'yuternye i informatsionnye tekhnologii v nauke, inzhenerii i upravlenii» [Izv. YuTU. Tech. sci. Thematic iss. "Computer and information technologies in science, engineering and management"]*, Taganrog: Publ. house TGI YuTU, vol. 5, no. 130, p. 90 (in Russian).
13. **Fedosov, S.V., Bakanov, M.O., Aleksandrova, O.V., Razgovorov, P.B. and Kuznetsov, I.A.** (2025), Comprehensive mathematical modelling in the management of physical and chemical processes during the transportation of concrete mixtures, *Umnye kompozity v stroitel'stve [Smart Composite in Construction]*, vol. 6, no. 4, pp. 23-42 (in Russian). Available at: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/6779/view> (accessed 20.12.2025).

Received 07.02.2026

Approved 28.02.2026

Accepted 06.03.2026